Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

PARTE 2: LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Tema 7: Semantica Formal

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción a la lógica.

❑ Componentes de la lógica proposicional

Lenguaje de primer orden
Alfabeto
Sintaxis
Términos
Predicados
Sustituciones

+

Semántica
Interpretación
Dominio de interpretación
Funciones de interpretación
Fórmulas abiertas y cerradas
Satisfacción
Consecuencia lógica

Razonamiento Semántico
Argumentos
Modelos
Contramodelos

Cáculo Deductivo
Teoría lógica
Sistema formal
Reglas de deducción natural
Reglas derivadas

Metalógica
Validez
Completud
Decibilidad

Conclusiones

Índice

Introducción a la semántica formal.

❑ ¿Qué es la semántica?

- Estudia el **significado de los símbolos**, por lo que se introduce el concepto de **interpretación** (conjunto de reglas precisas que permiten asignar objetos de un dominio a ciertas expresiones de un lenguaje formal).

- **Asigna un significado a las construcciones sintácticas**. Junto con la sintáctica ayuda a definir un sistema formal.

Introducción a la semántica formal.

- En general, dar significado a las fórmulas (interpretar) de un lenguaje formal consiste en definir una función: *FBF(L)* $\Rightarrow$*{ V, F}*

- Le **asigna el "valor de verdad" a las f.b.f.** (decir si son verdaderas o falsas).

- Composicionalidad: el significado de una expresión compleja depende de los significados de sus expresiones componentes.

- Cálculo de la función FBF(L):
  - Asignación de valor de verdad a todas las fórmulas atómicas de L:
    - Función de valoración (v): *FA(L)* $\Rightarrow$*{ V, F }*.

      Ej. *v(p) = V ; v(q) = F*

Introducción a la semántica formal.

- Asignación de valor de verdad a todas las fórmulas moleculares de L:
  - Cada conectiva esta completamente definida por su función de verdad:

$$fv_{\neg}(F) = V; \quad fv_{\neg}(V) = F$$
$$fv_{\wedge}(V,V) = V; \quad fv_{\wedge}(V,F) = fv_{\wedge}(F,V) = fv_{\wedge}(F,F) = F$$
$$fv_{\vee}(F,F) = F; \quad fv_{\vee}(V,F) = fv_{\vee}(F,V) = fv_{\vee}(V,V) = V$$
$$fv_{\rightarrow}(V,F) = F; \quad fv_{\rightarrow}(V,V) = fv_{\rightarrow}(F,V) = fv_{\rightarrow}(F,F) = V$$
$$fv_{\leftrightarrow}(V,F) = fv_{\leftrightarrow}(F,V) = F; \quad fv_{\leftrightarrow}(V,V) = fv_{\leftrightarrow}(F,F) = V$$

  - El valor de verdad de una fórmula molecular es función de su conectiva principal.
  - Ampliación de la función de valoración (*v*) a fórmulas moleculares: $FM(L) \Rightarrow \{V, F\}$

$$v(\neg A) = fv_{\neg}(v(A))$$
$$v(A \wedge B) = fv_{\wedge}(v(A),v(B))$$
$$v(A \vee B) = fv_{\vee}(v(A),v(B))$$
$$v(A \rightarrow B) = fv_{\rightarrow}(v(A),v(B))$$
$$v(A \leftrightarrow B) = fv_{\leftrightarrow}(v(A),v(B))$$

Interpretaciones.

❑ Objetivo de la semántica formal.

- Dado un LPO, definir de modo preciso el **significado de sus fórmulas**.

❑ Conceptos semánticos usados en semántica formal.

- **Dominio de interpretación *D*** :
  - Dominio: conjunto no vacío de objetos
  - Relaciones n-arias: subconjuntos de Dominio n
  - Funciones n-arias: n-tuplas de objetos del dominio ↦ objetos del dominio
- **Función de interpretación *i()*** :
  - Fórmulas ↦{V, F}
  - Términos ↦ objetos del dominio
  - Predicados y funciones ↦ relaciones y funciones sobre objetos del dominio
- **Interpretación I**: *<D, i()>*
  - Un dominio no vacío de individuos, D
  - Una función i() de individuos de D, funciones y relaciones sobre D a todas las constantes, funciones y predicados del LPO.
- **Modelo**: tipo particular de interpretación en la que:
  - Las premisas de una teoría T son verdaderas: T ↦ {V}

Interpretaciones.

- **Dominios de interpretación:**

  - Idea de partida: las expresiones de un lenguaje significan cuando *refieren* a algo distinto de ellas mismas, cuando *hablan de* algo: un dominio, un universo de discurso.

  - Por tanto, el punto de partida para dar significado a las fórmulas de un LPO es la elección de un **dominio de interpretación**:

    - **Dominio = Conjunto no vacío de individuos**
    - Ejemplos:
      - D = {Sol, Tierra, Luna}
      - D = N
      - D = {♦, ❍, ❑ }
      - Cualquier conjunto bien definido de objetos es aceptable como dominio de interpretación.

Interpretaciones.

- **Función de Interpretación para un lenguaje L:**
  - Una vez escogido un dominio D, definimos sobre él una función de interpretación *i()* que asigna significado al vocabulario de un LPO:

    - Toda **constante** $a_i \in L$: $i(a_i) = d_i \in D$
      - Todo elemento de *D* tiene un nombre (distinto) en *L* : para todo $d \in D$ existe una constante $a \in L$ tal que $i(a) = d$.
      - Si *L* no posee de partida suficientes constantes, **se amplía** para cumplir este requisito: *L(D)* es idéntico a *L* excepto por la incorporación de tantas constantes como sea necesario para nombrar a todos los individuos de *D*.

    - Toda **función** $f_n \in L$: $i(f_n) = f_D$
      - f_D: $<d_1,\ldots,d_n> \Rightarrow d$ (aplicación de D^n en *D*)
      - Un símbolo de función significa una aplicación de elementos de *D* en *D*.

    - Todo **predicado** n-ario $P \in L$: $i(P) = P_D$
      - P_D: $<d_1,\ldots,d_n> \Rightarrow \{V, F\}$ (aplicación de D^n en {V, F})

Interpretaciones.

- **Interpretaciones:**

  - Definimos una **interpretación *I*** como un par ***<D, i()>***:
    - Un conjunto no vacío de individuos, ***D***
    - Una función ***i()*** que asocia individuos de *D*, funciones y relaciones sobre *D* con constantes, funciones y predicados de *L*, respectivamente.

  - Asignar significado a las fórmulas de *L* implica:

    1. Asignar significado a las fórmulas atómicas

    2. Asignar significado al resto de fórmulas mediante inducción

Interpretaciones.

- **1.- Interpretación de fórmulas atómicas básicas:**

  - Asignación de valor de verdad a las fórmulas **atómicas** básicas de *L*:

    $P_n(t_1,\dots,t_n)$ es una fórmula atómica básica sii $t_1,\dots,t_n$ no contienen variables.

    $$\mathbf{i(P_n(t_1,\dots,t_n)) = V/F \quad sii \quad P_{nD}(i(t_1),\dots,i(t_n)) = V/F}$$

  - Cada interpretación concreta asignará un y sólo un valor de verdad a cada fórmula atómica básica de *L*. Dos interpretaciones con igual dominio e idénticas asignaciones al vocabulario, pueden diferir en el valor de verdad que asignan a sus fórmulas atómicas básicas.

  - En el caso del predicado *=*, su semántica es fija, sin variación entre interpretaciones:

    $i(t_1=t_2) = V/F$ sii $i(t_1)$ es idéntico a / no es idéntico a $i(t_2)$

Interpretaciones.

- **2.- Interpretación de fórmulas moleculares:**

  - Asignación de valor de verdad a las fórmulas moleculares:

    1. ***i(¬A) = V*** *sii i(A) = F;* ***i(¬A) = F*** *sii i(A) = V*
    2. ***i(A ∧B) = V*** *sii i(A) = V* y *i(B) = V;* ***i(A ∧B) = F*** *sii i(A) = F* o *i(B) = F*
    3. ***i(A ∨B) = V*** *sii i(A) = V* o *i(B) = V;* ***i(A ∨B) = F*** *sii i(A) = F* y *i(B) = F*
    4. ***i(A →B) = V*** *sii i(A) = F* o *i(B) = V;* ***i(A →B) = F*** *sii i(A) = V* y *i(B) = F*
    5. ***i(A ↔B) = V*** *sii i(A) = i(B);* ***i(A ↔B) = F*** *sii i(A) ≠ i(B);*
    6. ***i(∃xA) = V*** *sii i(A{x/a}) = V* para al menos una sustitución *x/a,* ***a*** *∈L(D)*
    7. ***i(∃xA) = F*** *sii i(A{x/a}) = F* para toda sustitución *x/a*, ***a*** constante de *L(D)*
    8. ***i(∀xA) = V*** *sii i(A{x/a}) = V* para toda sustitución *x/a*, ***a*** constante de *L(D)*
    9. ***i(∀xA) = F*** *sii i(A{x/a}) = F* para al menos una sustitución *x/a,* ***a*** *∈L(D)*

  - Nótese que estas definiciones son comunes a toda función de interpretación *i()*. Dos funciones de interpretación sólo pueden diferir en la constante elegida para sustituir a la variable en 6 y 9.

Interpretaciones.

- Ejemplo: **$\forall x(M(a, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)$**
  - Construimos una interpretación sobre el dominio de los números naturales: *D = {0, 1, 2, 3, 4, …}*
  - El lenguaje de la fórmula sólo tiene un símbolo de constante (a), por lo que ampliamos el conjunto de constantes y definimos L(D):

    $$\text{Ctes.} = \{a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$
  - La función de interpretación *i* podría ser:
    - *i(a) = 0, i(a1) = 1, i(a2) = 2, i(a3) = 3*, …
    - $P_D(x)$: *x* es par; $Q_D(x)$: *x* es impar; $M_D(x,y)$: $x < y$

$i(\forall x(M(a, x) \wedge P(x))) = F$

porque $i((M(a, x) \wedge P(x))\{x/a\}) = i(M(a, a) \wedge P(a)) =$
$M_D(i(a), i(a)) \wedge P_D(i(a)) = M_D(0, 0) \wedge P_D(0) = F$

$i(\neg\exists y Q(y)) = F$

porque $i(\exists y Q(y)) = V$
ya que $i(Q(y)\{y/a_1\}) = i(Q(a_1)) = Q_D(i(a_1)) = Q_D(1) = V$

por tanto **$i(\forall x(M(a, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)) = V$**

Interpretaciones.

- Ejemplo: **$\forall x(M(a, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)$**
  - Construimos una interpretación sobre el siguiente dominio: *D = {●, ■, ◆}.*
  - El lenguaje de la fórmula sólo tiene un símbolo de constante (a), por lo que ampliamos el conjunto de constantes y definimos L(D): Ctes. = {a, b, c}
  - La función de interpretación i podría ser:
    - i(a) = ●, i(b) = ■, i(c) = ◆

P_D	
●	V
■	V
◆	V

Q_D	
●	V
■	F
◆	V

M_D	●	■	◆
●	V	V	V
■	F	F	V
◆	V	F	F

$i(\forall x(M(a, x) \wedge P(x))) = V$

porque $i((M(a, x) \wedge P(x))\{x/a\}) = M_D(i(a), i(a)) \wedge P_D(i(a)) = M_D(●, ●) \wedge P_D(●) = V$

$i((M(a, x) \wedge P(x))\{x/b\}) = M_D(i(a), i(b)) \wedge P_D(i(b)) = M_D(●, ■) \wedge P_D(■) = V$

$i((M(a, x) \wedge P(x))\{x/c\}) = M_D(i(a), i(c)) \wedge P_D(i(c)) = M_D(●, ◆) \wedge P_D(◆) = V$

$i(\neg\exists y Q(y)) = F$

porque $i(\exists y Q(y)) = V$

ya que $i(Q(y)\{y/a\}) = i(Q(a)) = Q_D(i(a)) = Q_D(●) = V$

por tanto **$i(\forall x(M(a, x) \wedge P(x)) \rightarrow \neg\exists y Q(y)) = F$**

Interpretaciones.

- Ejemplo 1: Consideramos las siguientes afimaciones: *La Tierra orbita en torno al Sol. La Luna orbita en torno a la Tierra. La Tierra es un planeta. La Luna es un satélite*

  - Dadas las fórmulas: {O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)}
  - Podemos interpretarlas sobre el dominio D = {Sol, Tierra, Luna} y con una función de interpretación que plasme el significado intuitivo de *orbitar*, *planeta* y *satélite*:

    - i(a) = Tierra; i(b) = Sol; i(c) = Luna
    - P_D(x): x es un planeta
      P_D(Sol) = F; P_D(Tierra) = V; P_D(Luna) = F
    - S_D(x): x es un satélite
      S_D(Sol) = F; S_D(Tierra) = F; S_D(Luna) = V
    - O_D(x,y): x orbita en torno a y

O_D(Sol, Sol) = F;	O_D(Sol, Tierra)= F;	O_D(Sol, Luna) = F
O_D(Tierra, Sol) = V;	O_D(Tierra, Tierra) = F;	O_D(Tierra, Luna) = F
O_D(Luna, Sol) = F;	O_D(Luna, Tierra) = V;	O_D(Luna, Luna) = F

Interpretaciones.

- Ejemplo 1: A partir de la interpretación anterior, podemos evaluar las fórmulas:

{ O(a,b), O(c,a), P(a) $\wedge$ S(c), $\forall$x(O(x,b) $\rightarrow$ P(x)), $\forall$x$\forall$y(O(x,y) $\wedge$ P(y) $\rightarrow$ S(x)) }

  - i(O(a, b)) = O_D(i(a), i(b)) = O_D(Tierra, Sol) = V
  - i(O(c, a)) = O_D(i(c), i(a)) = O_D(Luna, Tierra) = V
  - i(P(a) $\wedge$ S(c)) = V sii i(P(a)) = V y i(S(c)) = V

    i(P(a)) = P_D(i(a)) = P_D(Tierra) = V

    i(S(c)) = S_D(i(c)) = S_D(Luna) = V
  - i($\forall$x(O(x, b) $\rightarrow$ P(x))) = V porque

    i((O(x, b) $\rightarrow$ P(x)){x/a}) = i(O(a, b) $\rightarrow$ P(a)) = V sii i(O(a, b))=F o bien i(P(a))=V

    i(P(a)) = P_D(Tierra) = V

    i((O(x, b) $\rightarrow$ P(x)){x/b}) = i(O(b, b) $\rightarrow$ P(b)) = V sii i(O(b, b))=F o bien (P(b))=V

    i(O(b,b)) = O_D(Sol, Sol) = F

    i((O(x, b) $\rightarrow$ P(x)){x/c}) = i(O(c, b) $\rightarrow$ P(c)) = V sii i(O(c, b)) = F o bien i(P(c)) = V

    i(O(c, b)) = O_D(Luna, Sol) = F

Interpretaciones.

- Ejemplo 1: A partir de la interpretación anterior, podemos evaluar las fórmulas:

  - $i(\forall x \forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x))) = V$ sii

    - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/a\}) = i(\forall y(O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))) = V$ sii

$i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/a\}) = i(O(a,a) \wedge P(a) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(a)) = V$

$i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/b\}) = i(O(a,b) \wedge P(b) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(a)) = V$

$i((O(a,y) \wedge P(y) \rightarrow S(a))\{y/c\}) = i(O(a,c) \wedge P(c) \rightarrow S(a)) = V$ sii $i(O(a,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(a)) = V$

    - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/b\}) = i(\forall y(O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))) = V$ sii

$i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/a\}) = i(O(b,a) \wedge P(a) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(b)) = V$

$i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/b\}) = i(O(b,b) \wedge P(b) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(b)) = V$

$i((O(b,y) \wedge P(y) \rightarrow S(b))\{y/c\}) = i(O(b,c) \wedge P(c) \rightarrow S(b)) = V$ sii $i(O(b,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(b)) = V$

    - $i((\forall y(O(x,y) \wedge P(y) \rightarrow S(x)))\{x/c\}) = i(\forall y(O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))) = V$ sii

$i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/a\}) = i(O(c,a) \wedge P(a) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,a) \wedge P(a)) = F$ o $i(S(c)) = V$

$i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/b\}) = i(O(c,b) \wedge P(b) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,b) \wedge P(b)) = F$ o $i(S(c)) = V$

$i((O(c,y) \wedge P(y) \rightarrow S(c))\{y/c\}) = i(O(c,c) \wedge P(c) \rightarrow S(c)) = V$ sii $i(O(c,c) \wedge P(c)) = F$ o $i(S(c)) = V$

Interpretaciones.

- Ejercicios:

1. Dadas las fórmulas: {O(a,b), O(c,a), P(a), S(c)}, interpretarlas en el dominio {■, ⚬, △} asignando a los predicados O(_,_), P(_) y S(_) los significados "más grande que", "cuadrado" y "redondo", respectivamente.
2. Dadas las fórmulas: {N(a), s(a)=b, N(b)}, interpretarlas en el dominio de las letras del alfabeto latino, siendo N(_) la propiedad de ser una vocal, =(_,_) la relación de identidad y s(_) la función sucesor en el orden lexicográfico usual.
3. Dadas las fórmulas: {P(a,b), P(a,c), H(b,c), p(b)=d, p(c)=e, R(d,e), A(a,d), A(a,e)}, interpretarlas en el dominio {Juan Carlos, Elena, Felipe, Froilán, Leonor} asignando a P(_,_), H(_,_), R(_,_), A(_,_) y p(_) los significados de "padre", "hermano", "primo", "abuelo" y "primogénito", respectivamente.
4. Dadas las fórmulas: {C(a), C(a,b), P(b), C(c), C(c,d), P(d), M(a,c), M(b,d)}, interpretarlas en el dominio {Nueva York, Estados Unidos, Madrid, España, París}, asignando a los predicados C(_), C(_,_), P(_) y M(_,_) los significados "ciudad", "ser la capital de", "país" y "ser mayor que", respectivamente.
5. Interpretar las fórmulas del ejercicio anterior en un dominio diferente, asignando a predicados y constantes una interpretación acorde con el dominio elegido.

Interpretaciones.

- Ejercicios:

1. Dadas las fórmulas:

$$\{ N(a), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x))), \forall x(N(x) \rightarrow x+a = x), \forall x\forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow x+s(y) = s(x+y) \}$$

interpretarlas en el dominio de los números naturales (con el 0), siendo N(_) la propiedad de ser un número natural, =(_,_) la relación de identidad y s(_) y +(_,_) las funciones sucesor y suma, respectivamente.

2. Interpretar las fórmulas resultantes de formalizar las oraciones siguientes:

   1. *María está enamorada de alguien*
   2. *Algunas cantantes de ópera no están gordas*
   3. *No todos los crímenes merecen la pena capital*
   4. *Las novelas de Cela me fascinan*
   5. *Hay profesores que no saben explicar*
   6. *Sólo los suecos entienden a Bergman*
   7. *Todo ciudadano tiene derecho a una vivienda*

Interpretaciones.

- **Fórmulas abiertas:**

  - Son aquellas que tienen al menos una variable libre (no cuantificada)
  - Ejemplos de fórmulas abiertas:
    1. *Alguien es el rey de Canadá*: R(x,a)
    2. *Algo es igual a dos*: x = 2
    3. *Algo orbita en torno a Júpiter*: O(x,b)
    4. *Alguien que sea humano será también mortal*: $H(x)\rightarrow M(x)$

  - ¿Que significado tienen estas fórmulas abiertas?
    1. R(x,a)es falsa pues ninguna sustitución de x por ninguna persona produce una afirmación verdadera: ninguna persona es rey de Canadá.
    2. x = 2 es una fórmula que puede ser verdadera si sustituimos x por el numeral 2, mientras que será falsa si elegimos cualquier otro numeral.
    3. O(x,b) es una fórmula que será verdadera si sustituimos x por los nombres de algunos cuerpos celestes y falsa si la sustituimos por otros.
    4. $H(x)\rightarrow M(x)$es una fórmula que es verdadera para cualquier individuo que pongamos en lugar de x: no hay nadie que sea humano y no sea mortal.

Interpretaciones.

- **Fórmulas abiertas:**
  - El significado (valor de verdad) de las fórmulas abiertas depende de:
    - La interpretación de sus símbolos (predicados y constantes)
    - El valor que tome su variable libre.
  - En algunos casos, para ciertas interpretaciones concretas, el significado de las fórmulas abiertas depende sólo de la interpretación dada a los símbolos Fórmulas abiertas verdaderas
    1. $x>y \rightarrow x+1>y+1$
    2. Padre(x,y) → edad(x)>edad(y)

    Mientras se mantenga la interpretación pretendida (aritmética, padres e hijos), estas fórmulas son verdaderas para cualesquiera sustituciones de x e y.
    - Fórmulas abiertas falsas
      1. $x >1 \rightarrow x>x2$
      2. Padre(x,y) → x=y

      Mientras se mantenga la interpretación pretendida (aritmética, padres e hijos), estas fórmulas son falsas para cualesquiera sustituciones de x e y.

Interpretaciones.

- **Fórmulas abiertas: satisfacibilidad, verdad y validez**

  Sea A una fórmula abierta.

  - A es satisfacible cuando puede ser verdadera:
    - Hay una interpretación **I = <D, i()>** y una sustitución θ**= {x_1/c_1,..., x_n/c_n}** de todas sus variables libres por constantes de L(D) que la hacen verdadera.

    (existen I = <D, i()> y θ tal que: i((A)θ) = V)

  - A es verdadera en una interpretación cuando:
    - Toda sustitución de sus variables libres por constantes de L(D) la hacen verdadera.

    (se cumple que i((A)θ) = V para toda θ)

  - A es válida cuando es verdadera en toda interpretación.

    (se cumple que i((A)θ) = V para toda I= <D,i()> y toda θ)

Interpretaciones.

- **Fórmulas abiertas y cerradas**
  - Dada una fórmula abierta $A(x_1,...,x_n)$, definimos:
    - **Cierre existencial** de $A(x_1,...,x_n)$: $\exists x_1,...,x_n A$
    - **Cierre universal** de $A(x_1,...,x_n)$: $\forall x_1,...,x_n A$
  - Relaciones semánticas entre fórmulas abiertas y cerradas:
    - $A(x_1,...,x_n)$ es satisfacible / insatisfacible sii $\exists x_1,...,x_n A$ lo es.
    - $A(x_1,...,x_n)$ es verdadera en **I**/ válida sii $\forall x_1,...,x_n A$ lo es.
  - Interpretación de fórmulas abiertas y cerradas:
    - En ambas se emplea la operación de sustitución de variables por constantes.

Interpretaciones.

- **Modelos y Contra-Modelos**
  - Modelo: una interpretación I es modelo de una fórmula A sii A es verdadera en I
    - Esta definición se aplica igualmente a fórmulas abiertas y cerradas.
  - Contra-modelo: una interpretación I es contra-modelo de una fórmula A sii para alguna sustitución θ de todas sus variables libres: i((A)θ) = F
    - En el caso de que A sea fórmula cerrada, I es contra-modelo sii i(A) = F
  - Ejercicio. Definir un modelo y un contra-modelo para cada una de las siguientes fórmulas:
    - $\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$
    - $\exists x(P(x,a) \rightarrow Q(f(x)))$
    - $\exists x P(x) \wedge P(a)$
    - $\forall x P(x) \wedge \neg P(a)$
    - $\forall x \exists y(x = y)$
    - $\exists y \forall x(x = y)$
    - $\forall y \forall z \exists x(x = y+z)$
    - $\exists x \forall y \forall z(x = y+z)$
    - $\exists x(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \vee \forall x P(x,x)$
    - $\forall x \neg(\forall y P(x,y) \rightarrow Q(f(x))) \wedge \exists x \neg P(x,x)$

Interpretaciones.

- **Satisfacción de fórmulas cerradas**

  - Una interpretación **I**= <D, i()> **satisface** una fórmula cerrada (afirmación) A ∈L sii i(A) = V
    - Una fórmula A ∈L es **satisfacible** sii existe al menos una interpretación **I** tal que i(A) = V
    - Una fórmula A ∈L es **insatisfacible** sii no existe ninguna interpretación **I** tal que i(A) = V

  - Extensión a conjuntos de fórmulas {A1,...,An}, Ai∈L :
    - Una interpretación **I** **satisface** {A1,...,An} sii i(Ai) = V para *toda* Ai∈{A1,...,An}
    - {A1,...,An} es **satisfacible** sii existe al menos una interpretación **I** tal que i(Ai) = V para *toda* Ai∈{A1,...,An}
    - {A1,...,An} es **insatisfacible** sii no existe ninguna interpretación **I** tal que i(Ai) = V para *alguna* Ai∈{A1,...,An}

  - Una fórmula A es **válida** sii i(A) = V para toda interpretación <D, i()>